МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 34, № 3 (1983)

ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК С ОДНОЙ НЕОДНОМЕРНОЙ НЕПРИВОДИМОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

А. В. Подрябинников

Настоящая работа посвящена описанию конечных групп, имеющих точное транзитивное нерегулярное подстановочное представление с единственной (с точностью до эквивалентности) неодномерной неприводимой составляющей, причем эта неприводимая составляющая имеет степень p, где p — простое число. Конечные группы, у которых регулярное представление содержит только одну (с точностью до эквивалентности) неодномерную неприводимую составляющую, рассматривались в работах [1—3]. Всюду ниже рассматриваются только конечные группы и их представления над полем комплексных чисел. Терминология и обозначения, касающиеся групп подстановок, соответствуют принятым в книге [4].

Основным результатом данной статьи является следующая

ТЕОРЕМА. *Транзитивная нерегулярная группа подстановок имеет только одну (с точностью до эквивалентности) неодномерную неприводимую составляющую, причем простой степени p тогда и только тогда, когда она либо 2-транзитивная группа степени $p+1$, либо транзитивная группа степени $2p$, изоморфная одной из следующих групп*:

а) $p \neq 2$, *группа Фробениуса с элементарным абелевым ядром порядка 2^m (m — показатель, которому принадлежит 2 по модулю p) и дополнительным множителем порядка p*;

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1983

б) $p \neq 2$, *прямое произведение группы Фробениуса из пункта* (а) *и группы порядка* 2;

в) $p = 2$, *силовская 2-подгруппа симметрической группы* S_4.

Доказательство теоремы проведем в несколько этапов. Пусть G — транзитивная нерегулярная группа подстановок степени n. Мы будем рассматривать ее как собственное подстановочное представление с характером π. Пусть $\chi_1 = 1_G, \chi_2, \ldots, \chi_{k+1}$ — неприводимые составляющие характера π, причем $\chi_1, \ldots, \chi_k$ — одномерные характеры, а χ_{k+1} — характер p-мерного представления. Кратность χ_i в π обозначим через e_i.

Положим $N = \bigcap_{i=1}^{k} \ker \chi_i$, где $\ker \chi_i$ — ядро характера χ_i.

Предложение 1. *Группа* G *либо 2-транзитивная степени* $p+1$, *либо* $n = 2p$ *и* N *нормальная элементарная абелева 2-подгруппа группы* G *индекса* p. *В последнем случае* $k = p$, $e_{k+1} = 1$.

Доказательство. Предположим, что N — абелева группа. Тогда ограничение характера χ_{k+1} на N есть

$$\mathrm{Res}_N \chi_{k+1} = \psi + \psi^{g_2} + \ldots + \psi^{g_p},$$

где ψ — неприводимая составляющая характера $\mathrm{Res}_N \chi_{k+1}$, $g_2, \ldots, g_p$ — представители смежных классов G по подгруппе N^* — группе инерции характера ψ. Как известно, существует одномерный характер θ группы N^* такой, что $\mathrm{Res}_N \theta = \psi$ и $\mathrm{Ind}_{N^*}^{G}(\theta) = \chi_{k+1}$, где $\mathrm{Ind}_{N^*}^{G}(\theta)$ обозначает характер группы G, индуцированный характером θ подгруппы N^* (см. [5]). Пусть

$$\mathrm{Ind}_{N}^{N^*}(\psi) = \sum_{(i)} \theta_i,$$

где θ_i — неприводимые характеры N^*. Кратность θ_i в $\mathrm{Ind}_{N}^{N^*}(\psi)$ равна кратности ψ в $\mathrm{Res}_N \theta_i$. Если $\mathrm{Res}_{G_\alpha} \psi \in \mathrm{Res}_{G_\alpha} \theta_i$, то $1_{G_\alpha} \in \mathrm{Res}_{G_\alpha} \theta_i$. Следовательно, $\mathrm{Ind}_{N^*}^{G}(\theta_i)$ содержится в π, т. е. $\mathrm{Ind}_{N^*}^{G}(\theta_i) = \chi_{k+1}$, а θ_i — одномерный характер группы N^* и $\psi = \mathrm{Res}_N \theta_i$. Теперь нетрудно показать, что в $\mathrm{Ind}_{N}^{N^*}(\psi)$ входит $|N^* : N| = k/p$ одномерных характеров θ_i группы N^* таких, что $\mathrm{Res}_N \theta_i = \psi$ и $\mathrm{Ind}_{N^*}^{G}(\theta_i) = \chi_{k+1}$. Поскольку $\mathrm{Ind}_{N^*}^{G}(\theta_i) \neq \mathrm{Ind}_{N^*}^{G}(\theta_j)$, если $\theta_i \neq \theta_j$, то $k = p$. У нас $\mathrm{Res}_N \chi_{k+1} = \psi + \psi^{g_2} +$

$+ \ldots + \psi^{g_p}$. Подгруппа N имеет p орбит, ψ^{g_i} и ψ^{g_j} при $i \neq j$ не могут входить в одну и ту же транзитивную составляющую подгруппы N, а каждый одномерный характер имеет в транзитивной составляющей подгруппы N кратность 1, поэтому кратность χ_{k+1} в π равна 1, т. е. $e_{k+1} = 1$. При этом степень n группы G равна $2p$, а так как $|G : N| = p$, то $|N : G_\alpha| = 2$ и все орбиты N имеют длину 2, откуда следует, что N — элементарная абелева 2-группа.

Если N — неабелева группа, то $\mathrm{Res}_N \chi_{k+1}$ — неприводимый характер подгруппы N, а $\chi_i \cdot \chi_{k+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) — попарно неэквивалентные неприводимые характеры группы G (см. [6, предложение 1.2]). Легко проверить, что $\chi_i \cdot \chi_{k+1}$ входят в π при любом $i = 1, 2, \ldots, k$. Значит, $k = 1$, т. е. π содержит одну одномерную составляющую и одну p-мерную кратности e_2.

$p^{e_2^2}$ делит $n^{s-2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{s} n_i\right)$ (см. [4, теорема 30.5]), где $n_1 = 1$, $n_2, \ldots, n_s$ — длины орбит стабилизатора точки G_α;

$$n = \sum_{i=1}^{s} n_i = 1 + e_2 \cdot p, \qquad s = 1 + e_2^2.$$

Значит, $p^{e_2^2} = p^{s-1}$ делит $\prod_{i=1}^{s} n_i$.

С другой стороны,

$$\sqrt[s-1]{\prod_{i=2}^{s} n_i} \leqslant \frac{1}{s-1} \sum_{i=2}^{s} n_i = \frac{1}{s-1} p \cdot e_2.$$

Отсюда легко следует, что $s = 2$ и $e_2 = 1$.

Значит, $\pi = 1_G + \chi_2$, а G — 2-транзитивная группа степени $p + 1$.

Всюду ниже будем считать, что $p \neq 2$.

Предложение 2. *Если $n = 2p$, то G одна из двух следующих групп:*

(а) *группа Фробениуса с элементарным абелевым ядром порядка 2^t и дополнительным множителем порядка p;*

(б) *прямое произведение группы Фробениуса типа* (а) *и группы порядка* 2.

Доказательство. Если $Z(G) = 1$, то очевидно, что G — группа Фробениуса с ядром N.

Пусть $Z(G) \neq 1$. Ясно, что $Z(G)$ выделяется в G прямым множителем. Поэтому $G = \bar{G} \times Z(G)$, где $\bar{G}$ —

группа Фробениуса. Так как $|N : G_\alpha| = 2$ и $|Z(G) \cap \cap G_\alpha| = 1$, то

$$|Z(G)| = 2.$$

Согласно предложению 2 при $n = 2p$ G либо группа Фробениуса с элементарным абелевым ядром, являющимся 2-группой, и дополнительным множителем порядка p, либо прямое произведение указанной группы Фробениуса и группы порядка 2. Поскольку эти группы имеют неприводимые представления лишь степеней 1 и p, то мы полностью опишем интересующие нас группы, если найдем условия, при которых группы, указанные в предложении 2, имеют точное нерегулярное транзитивное подстановочное представление степени $2p$.

Утверждения следующего предложения хорошо известны.

Предложение 3. *Пусть G — группа Фробениуса с элементарным абелевым ядром N порядка 2^t и дополнительным множителем P простого порядка p. Пусть m — показатель, которому принадлежит 2 по модулю p. Тогда верны следующие утверждения:*

1) *каждая минимальная нормальная подгруппа группы G лежит в N и имеет порядок 2^m. Каждая собственная нормальная подгруппа G есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп;*

2) *если $m \neq t$, то каждая подгруппа индекса 2 из N содержит нетривиальную нормальную подгруппу из G.*

Доказательство теоремы. Из предложения 1 следует, что либо G 2-транзитивная степени $p + 1$, либо $n = 2p$. Если $p = 2$ и $n = 4$, то легко проверить, что G — силовская 2-подгруппа симметрической группы S_4.

Пусть $p \neq 2$, $n = 2p$. Согласно предложению 2 G либо группа Фробениуса с элементарным абелевым ядром порядка 2^t и дополнительным множителем порядка p, либо прямое произведение указанной группы Фробениуса и группы порядка 2.

Выясним условия, при которых группа типа (а) предложения 2 имеет точное подстановочное транзитивное представление степени $2p$. Легко видеть, что для существования такого представления необходимо и достаточно, чтобы в N имелась подгруппа H такая, что $|N : H| = 2$ и $\bigcap_{g \in G} g^{-1} H g = 1$. Согласно предложению 3 для этого

необходимо и достаточно, чтобы $|N| = 2^m$, где m — показатель, которому принадлежит 2 по модулю p. Следовательно, группы типа (а) теоремы и только они являются группами Фробениуса с элементарным абелевым ядром, являющимся 2-группой, и дополнительным множителем порядка p, имеющими точное транзитивное нерегулярное подстановочное представление степени $2p$.

Пусть теперь $G = Z(G) \times \overline{G}$, где $|Z(G)| = 2$ и $\overline{G}$ — группа Фробениуса с ядром $\overline{N}$ и дополнительным множителем P. Пусть $H < N$, $|N:H| = 2$ и $H \neq \overline{N}$. Тогда $N = H \cdot \overline{N}$ и $|\overline{N}: H \cap \overline{N}| = 2$, т. е. $H \cap \overline{N}$ — подгруппа индекса 2 группы $\overline{N}$. Следовательно, $|N| = 2^m$, m — показатель, которому принадлежит 2 по модулю p, так как в противном случае $H \cap \overline{N}$ содержит нормальную подгруппу группы $\overline{G}$ (согласно предложению 3) которая, очевидно, будет нормальной подгруппой G. Пусть $|\overline{N}| = 2^m$. Предположим, что в H имеется нормальная подгруппа S группы G. Тогда $S \cap \overline{N} = 1$ и, следовательно, $|S| = 2$, т. е. $S = Z(G)$.

Покажем, что H можно выбрать так, что представление группы G подстановками смежных классов по H будет точным. Пусть $n_1, \ldots, n_m$ — образующие подгруппы $\overline{N}$ и z — образующая группы $Z(G)$. Ясно, что $N = \overline{N} + z \cdot \overline{N}$. Положим $H = \langle n_1, \ldots, n_{m-1}, z \cdot n_m \rangle$. Легко видеть, что $n_1, \ldots, n_{m-1}, z \cdot n_m$ — независимы, $H \neq \overline{N}$ и $H \not\supset Z(G)$. Следовательно, $|N:H| = 2$ и $\bigcap_{g \in G} g^{-1} H g = 1$. Таким образом, группа типа (б) предложения 2 имеет точное транзитивное нерегулярное подстановочное представление степени $2p$ тогда и только тогда, когда она имеет вид, указанный в пункте (б) теоремы.

Автор благодарит В. Д. Мазурова за полезные замечания.

Поступило
14.VII.1982

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Seitz G., Finite groups having only one irreducible representation of degree greater than one, Proc. Amer. Math., Soc., 19, № 2 (1968), 459—461.

[2] Pelikán J., Finite groups with few non-linear irreducible characters, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 25, № 1—2 (1974), 223—226.

[3] Egawa J., Iwahori N., Finite groups which have only one nonlinear irreducible character, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1A, 24, № 1 (1977), 247—253.
[4] Wielandt H., Finite permutation groups, N. Y.— London, Academic Press, 1964.
[5] Huppert B., Endliche Gruppen. 1, Berlin—Heidelberg— N. Y., Springer-Verlag, 1967.
[6] Isaacs I. M., Passman D. S., Groups whose irreducible representations have degrees dividing p^e, Illinois J. Math., 8, № 3 (1964), 446—457.