МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 5, № 5 (1969), 553—559

УДК 512.4

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ПРИМАРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОДУЛЕЙ

А. В. Подрябинников

Рассматриваются конечные цепочки модулей над коммутативным кольцом, в которых каждый член является примарным подмодулем следующего члена. Библ. 3 назв.

Всюду ниже R — коммутативное кольцо с единицей, а все R — модули унитарные.

Как известно, если M — нётеровский R-модуль, а N — его подмодуль, то N можно представить конечным несократимым пересечением примарных подмодулей модуля M:

$$N = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k.$$

Если рассмотреть цепочку

$$N = Q_1 \cap \ldots \cap Q_k \subset Q_1 \cap \ldots \cap Q_{k-1} \subset \ldots \subset Q_1 \cap Q_2 \subset Q_1 \subset M,$$

то нетрудно показать, что каждый ее член является примарным подмодулем следующего члена.

Эту ситуацию можно обобщить следующим образом: будем для любого подмодуля N модуля M называть *примарной цепочкой между M и N* любую конечную последовательность вида

$$N = N_k \subset N_{k-1} \subset \ldots \subset N_1 \subset N_0 = M, \qquad (1)$$

в которой каждый N_i является примарным подмодулем N_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, k$.

В этой работе рассматриваются свойства примарных цепочек, даются некоторые достаточные условия их существования и, в частности, обнаруживается, что примарные

цепочки между M и N могут существовать и тогда, когда подмодуль N не может быть представлен пересечением примарных подмодулей модуля M.

1. *Радикалом* $\overset{M}{\sqrt{N}}$ *подмодуля* N *модуля* M мы будем называть идеал кольца R, состоящий из всех элементов $r \in R$, обладающих следующим свойством: для каждого из них и для каждого элемента $m \in M$ существует такой натуральный показатель степени n, что $r^n \cdot m \in N$ (это определение отличается от общепринятого, имеющегося, например, в [1], стр. 289, только тем, что не требуется общности показателя n для всех элементов $m \in M$; для нётеровских модулей оба определения, конечно, совпадают). При таком определении может быть сохранено общепринятое определение примарного подмодуля (см. [1]). Если P есть простой идеал кольца R, то P-компонентой подмодуля N заданного R-модуля M называется множество N_p элементов $m \in M$, для каждого из которых существует элемент $r \in R \setminus P$, удовлетворяющий условию $r \cdot m \in N$. Имеет место следующее предложение:

ЛЕММА 1. *Если* P *— один из минимальных простых идеалов из* R, *содержащих радикал* $\overset{M}{\sqrt{N}}$, *и если* $N_P \neq M$, *то* N_P *есть примарный подмодуль модуля* M, *а его радикал* $\overset{M}{\sqrt{N_P}} = P$.

Это предложение аналогично соответствующему предложению для идеалов кольца R (см. [2], стр. 16) и доказывается дословно так же.

Вообще говоря, может оказаться, что P-компонента подмодуля N модуля M совпадает с M. Однако имеет место

ЛЕММА 2. *Если между модулем* M *и его подмодулем* N *существует хотя бы одна примарная цепочка, например* (1), *то* $N_P \neq M$ *для любого минимального простого идеала* P *из* R, *содержащего* $\overset{M}{\sqrt{N}}$. *Среди радикалов* $\overset{N_{i-1}}{\sqrt{N_i}}$ *цепочки* (1) *содержатся все минимальные простые идеалы из* R, *содержащие* $\overset{M}{\sqrt{N}}$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\overset{M}{\sqrt{N}} = \bigcap_{i=1}^{k} \overset{N_{i-1}}{\sqrt{N_i}}.$$

Радикалы $\sqrt[N_{i-1}]{N_i}$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ являются простыми идеалами кольца R, так как каждый N_{i+1} примарен в N_i (см. [1]). Поэтому упомянутый в формулировке идеал P не может строго содержать ни один из радикалов цепочки. Если $P \neq \sqrt[N_i]{N_{i+1}}$ для каждого $i = 0, \ldots, k-1$, то найдется элемент r, принадлежащий $\sqrt[M]{N}$ и не принадлежащий P, что невозможно. Следовательно, при некотором i должно быть $P = \sqrt[N_i]{N_{i+1}}$. Этим доказано второе утверждение леммы.

Если бы было $N_p = M$, то для любого элемента $m \in M$ нашелся бы $r \in R \setminus P$, для которого $r \cdot m \in N \subset N_{i+1}$. В частности, это имело бы место для любого элемента из N_i. Но включение $r \cdot m \in N_{i+1}$ при $r \notin \sqrt[N_i]{N_{i+1}}$ и $m \notin N_{i+1}$ противоречит примарности N_{i+1} в N_i.

Примарную цепочку (1) между M и N мы будем называть *сокращенной*, если радикалы $\sqrt[N_i]{N_{i+1}}$ $(i = 0, \ldots, k-1)$ все различны и каждый $\sqrt[N_i]{N_{i+1}}$ является одним из минимальных простых идеалов в R, содержащих $\sqrt[N_i]{N}$. Число k мы будем называть *длиной цепочки* (1).

ТЕОРЕМА 1. *Если между модулем M и его подмодулем N существует хотя бы одна примарная цепочка, то между ними существует и сокращенная цепочка.*

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда между M и N существует примарная цепочка вида

$$N \subset N_1 \subset M,$$

$\sqrt[N_1]{N} = P$ и $\sqrt[M]{N_1} = P_1$, причем P — минимальный простой идеал, содержащий $\sqrt[M]{N}$. В силу лемм 2 и 1 будет $N_P \neq M$ и $\sqrt[M]{N_P} = P$, причем N_P есть примарный подмодуль M. Кроме того, $N_1 \cap N_P = N$, так как если $m \in N_1 \cap N_P$ и $m \notin N$, то для некоторого $r \in R \setminus P$ было бы $r \cdot m \in N$, а это противоречит примарности N в N_1. Пусть $r \in P_1$.

Тогда для любого $m \in N_p$ будет $r^n \cdot m \in N_1$ при некотором n, т. е. $r^n \cdot m \in N_1 \cap N_P = N$, а это означает, что $r \in \sqrt[N_P]{N}$. С другой стороны, если $r \in \sqrt[N_p]{N}$ и $m \in N_P \setminus N$, то $m \notin N_1$ и при некотором n будет $r^n \cdot m \in N \subset N_1$. Отсюда в силу примарности N_1 в M получаем $r^n \in P_1$. Таким образом, $\sqrt[N_P]{N} = P_1$. Теперь нетрудно показать, что N примарен в N_P. Действительно, если $m \in N_P \setminus N$ и $r \cdot m \in N$, то $m \notin N_1$ и $r \cdot m \in N_1$, откуда $r \in P_1$.

Этим установлена примарность цепочки $N \subset N_P \subset M$, которая, очевидно, является сокращенной.

Случай наличия произвольной примарной цепочки (1) сводится к предыдущему рассмотрением того ее участка

$$N_{i+1} \subset N_i \subset N_{i-1},$$

в котором радикал $P_i = \sqrt[N_i]{N_{i+1}}$ является минимальным простым идеалом, содержащим $\sqrt[M]{N}$. Применяя предыдущее построение, получаем цепочку, в которой радикал P_i перемещен на один шаг вправо. Возможность превратить в конце концов любую примарную цепочку в сокращенную становится очевидной, если заметить, что в цепочке, у которой два последовательных радикала $\sqrt[N_i]{N_{i+1}}$ и $\sqrt[N_{i-1}]{N_i}$ совпадают, можно просто вычеркнуть член N_i, не нарушая примарности цепочки.

ТЕОРЕМА 2. *Любые две сокращенные примарные цепочки между M и N имеют одинаковые длины и совпадающие наборы радикалов. Если, кроме того, порядок расположения радикалов у них совпадает, то цепочки совпадают полностью.*

Доказательство. Если длина наиболее короткой из данных цепочек равна 1, то утверждения очевидны. Допустим, что утверждения верны, если эта длина $< k$. Если теперь, кроме заданной сокращенной цепочки (1) длины k, задана другая сокращенная примарная цепочка

$$N = M_l \subset M_{l-1} \subset \ldots \subset M_0 = M,$$

то из нее приемами доказательства теоремы 1 можно получить сокращенную примарную цепочку с тем же набором радикалов и такую, что $\overset{M}{\sqrt{M_1}} = \overset{M}{\sqrt{N_1}}$. В этом случае без труда устанавливается, что $M_1 = N_1$, и доказательство заканчивается применением предположения индукции к цепочкам между N и N_1.

Укажем теперь пример модуля и подмодуля, между которыми существует примарная цепочка и в то же время подмодуль не допускает представления в виде пересечения примарных подмодулей.

Пусть $K = k(x, y)$ — поле рациональных функций от двух переменных над некоторым полем k. Через $\partial_x a(x, y)$ будем обозначать степень многочлена $a(x, y)$ по переменной x, а через $\partial_{y_x} a(x, y)$ степень относительно y коэффициента при x в старшей степени в $a(x, y)$.

В качестве кольца R возьмем совокупность всех рациональных функций вида $a(x, y)/b(x, y)$ из K, для которых $\partial_x a(x, y) \leqslant \partial_x b(x, y)$, причем в случае равенства $\partial_x a(x, y) = \partial_x b(x, y)$ удовлетворяется условие $\partial_{y_x} a(x, y) \geqslant \partial_{y_x} b(x, y)$.

Это R является кольцом дискретного нормирования ранга 2 (см. [1], гл. VI). В нем существуют два ненулевых простых идеала:

$\mathfrak{M}_1$ — идеал, состоящий из всех дробей вида $a(x, y)/b(x, y)$, где $\partial_x a(x, y) < \partial_x b(x, y)$.

$\mathfrak{M}_2$ — идеал, состоящий из всех дробей $a(x, y)/b(x, y)$, для которых $\partial_x a(x, y) \leqslant \partial_x b(x, y)$ и для которых в случае равенства $\partial_x a(x, y) = \partial_x b(x, y)$ имеет место соотношение $\partial_{y_x} a(x, y) > \partial_{y_x} b(x, y)$.

В качестве M возьмем само кольцо R, рассматриваемое как R-модуль, а в качестве N — его подмодуль $\frac{y^2}{x} R$. Очевидно, что $\overset{R}{\sqrt{N}} = \mathfrak{M}_1$.

Нетрудно видеть, что цепочка $\frac{y^2}{x} R \subset \mathfrak{M}_1 \subset R$ является примарной цепочкой между N и R. В то же время $\frac{y^2}{x} R$ не является пересечением примарных подмодулей модуля R по следующим причинам: если бы N был пересечением примарных подмодулей R, то существовала бы примарная цепочка $N \subset N_1 \subset R$, в которой N_1 был бы примарным подмодулем R и имел бы радикал $\mathfrak{M}_2$. Но в R

существует лишь один примарный подмодуль с радикалом $\mathfrak{M}_2$ — это сам $\mathfrak{M}_2$. В то же время наш N не является примарным подмодулем в $\mathfrak{M}_2$.

2. Мы установим теперь некоторые достаточные условия существования примарных цепочек.

Пересечение $\bigcap\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$ некоторого семейства идеалов Q_α, $\alpha \in I$, кольца R будем называть *существенно бесконечным*, если $\bigcap\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha \neq Q_{\alpha_1} \cap \ldots \cap Q_{\alpha_k}$ для любого конечного подмножества $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ множества I.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, удовлетворяющее условиям*:

а) *ни один идеал кольца R, совпадающий со своим радикалом, не может быть представлен существенно бесконечным пересечением примальных идеалов* (по поводу определения примального идеала см., например, [3]);

б) *для простых идеалов кольца R выполнено условие обрыва возрастающих цепей.*

Тогда для любого R-модуля M между ним и любым его подмодулем N существует примарная цепочка.

Доказательство. Пусть P — минимальный простой идеал кольца R, содержащий $\overset{M}{\sqrt{N}}$, N_P — подмодуль модуля M, определенный в лемме 1. Если $N_P = M$, то для каждого $m_i \in M$ найдется элемент $r_i \in R \setminus P$ такой, что $r_i m_i \in N$. Образуем для каждого $m_i \in M \setminus N$ идеал $\overset{M}{\sqrt{N}} + r_i R$ и рассмотрим пересечение $\bigcap\limits_{m_i \in M\setminus N} (\overset{M}{\sqrt{N}} + r_i R)$. Нетрудно показать, что оно равно $\overset{M}{\sqrt{N}}$. С другой стороны, каждый идеал представим пересечением примальных идеалов. В частности, $\overset{M}{\sqrt{N}} + r_i R = \bigcap\limits_j Q_j^{(i)}$. Поэтому $\overset{M}{\sqrt{N}} = \bigcap\limits_i \bigcap\limits_j Q_j^{(i)}$. Но идеал $\overset{M}{\sqrt{N}}$ совпадает со своим радикалом и в силу условия а) должен быть равен пересечению конечного числа идеалов $Q_j^{(i)}$:

$$\overset{M}{\sqrt{N}} = Q_{j_1}^{(i_1)} \cap \ldots \cap Q_{j_k}^{(i_k)}.$$

Из сказанного выше ясно, что элементы $r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}$ удов-

летворяют условиям $r_{i_s} \in Q_{j_s}^{(i_s)}$, а значит, их произведение $r_{i_1} \cdot r_{i_2} \cdot \ldots \cdot r_{i_k}$ содержится в $\overset{M}{\sqrt{N}} \cap (R \setminus P)$ вопреки тому, что $\overset{M}{\sqrt{N}} \cap (R \setminus P) = \phi$.

Этим установлено, что $N_P \neq M$, а значит, по лемме 1, N_P есть примарный подмодуль M и $\overset{M}{\sqrt{N_P}} = P$.

Теперь N можно рассматривать как подмодуль модуля N_P и, беря любой минимальный простой идеал P', содержащий $\overset{N_P}{\sqrt{N}}$, образовать соответствующий подмодуль $N_{P'}$, При $N_{P'} \neq N_P$ будет $\overset{N_P}{\sqrt{N_{P'}}} = P'$ и $N_{P'}$ будет примарным подмодулем модуля N_P.

Продолжая этот процесс, мы либо на конечном шаге придем к равенству $N_{P(k)} = N$ и тем самым получим примарную цепочку $N = N_{P(k)} \subset \ldots \subset N_P \subset M$ между подмодулем N и модулем M, либо будем иметь счетную цепочку вида $M \supset N_P \supset N_{P'} \supset \ldots$, для которой $N_{P(k+1)} \neq N_{P(k)}$. По построению написанной цепочки нетрудно усмотреть, что ни один из радикалов $\overset{N_{P(k)}}{\sqrt{N_{P(k+1)}}}$ не может содержать следующих за ним. С другой стороны, если мы выберем из множества $\{P_i\}$ этих радикалов максимальные по включению элементы, то их пересечение будет идеалом, совпадающим со своим радикалом. Следовательно, по условию а), таких максимальных элементов будет лишь конечное число. Но отсюда следует конечность числа идеалов в цепочке, вопреки ее предположенной счетности.

Условиям теоремы 3, в частности, удовлетворяют все кольца с конечным числом простых идеалов. Следовательно, модули над такими кольцами будут обладать свойством, указанным в утверждении теоремы 3.

Поступило
3.VI.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, М., 1963.
[2] Krull W., Idealtheorie, Berlin, 1935.
[3] Barnes W. E., Primal ideals and isolated components in noncommutative rings, Trans. Amer. Math. Soc., 82, № 1 (1956), 1—16.